

イントロダクション pp.3~11

○書籍概要

- ・「セガ的 基礎線形代数講座」第1版 (山中勇毅 著、日本評論社)
- ・学術書。しかも数学の本がバズってたので。
- ・中身としても一般企業の新入社員研修に使われているのとして、ベクトル等の学び直しにはちょうどいいかなと判断した。
- ・諸事情で2008年くらいからセガのことは嫌っているが、自然科学くらいは何も偽っていない……と信じている。

○数の導入と拡張



なんかいつの間にかあった。

5世紀ごろのインド
0と負数の導入

(時代はわからない)にバビロニア
わりとある分数と1数の導入

ピタゴラス学派(たぶん無理数)
無理数の導入

複素数 $\mathbb{C}$

1545年 カルダノの3次方程式
虚数の導入

この5つの数はどれも無限だが、数直線やマトリックスの上で見ると、
 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ と順に数どうしの間隔が埋まっていく。
数直線上での数の詰まりぐあいを「稠密」というが、それがだんだんけずく。
また、有理数以前の3種類については数えることができるので「可算集合」といふ。
逆に実数以降2種類は不可算集合。

○数学の考え方とは?

- ・「存在する」ある集合の中で命題を与えたとき、それを満たす解が集合内に存在すること。
(ex) $x^2 = -1$ の解は $\mathbb{C}$ には $\pm i$ が存在するが、
 $\mathbb{R}$ には存在しない(解なし)

・モノの考え方

- (i) 真偽が明確となる命題だけ議論する。
- (ii) 定義/公理を出発点とし、真となる命題を積み重ねる証明プロセス
- (iii) 紙と鉛筆があれば誰もが追証可能な形式とする。

初等関数 pp.12 ~ pp.36

初等関数: 代数関数、指数関数、対数関数、三角関数、逆三角関数、
双曲線関数、逆双曲線関数のそれら自身あるいは複数の合成で
できた関数で、かつ1変数である関数のこと
(例) $y = 3 \cos x + 4$

指数関数

$$y = a^x \quad (a: \text{基数 } x: \text{指数})$$

(性質)

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x \div a^y = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$(a/b)^x = a^x / b^x$$

$\Rightarrow$ 指数乗法則

また、 $a > 1$ のとき $x \rightarrow -\infty$ で収束、 $x \rightarrow +\infty$ で発散
 $0 < a < 1$ のとき $x \rightarrow +\infty$ で収束、 $x \rightarrow -\infty$ で発散

ネイピア数

$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ で定義される e をネイピア数と呼ぶ。

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = {}^nC_0 1^n \left(\frac{1}{n}\right)^0 + {}^nC_1 1^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \dots + {}^nC_n 1^0 \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow \text{最項は } {}^nC_{n-(k+1)} 1^{n-(k+1)} \left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \frac{n!}{(n-(k+1))! (k+1)!} \left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} \quad (\text{二項定理})$$

$\Rightarrow$ 係数に比し $\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}$ の収束速度がはるかに速いので、
 e はある一定の値をとる、ということになる。(負合で計算すると $e = 2.71828\dots$)

ネイピア数の特殊な性質として $f(x) = e^x$ としたとき、

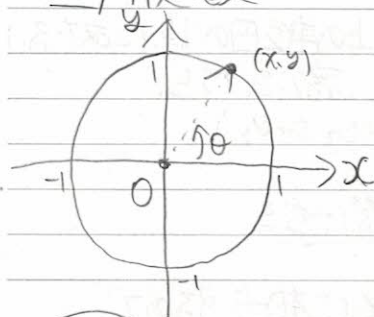
$f(x) = f(ax)$ 、 $\int f(x) dx = f(x) (1/C)$ と、微積分しても形が変わらないことが挙げられる。
 e^x をよくに 自然指数 と呼ぶこともある。

$$\frac{d}{dx} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

9

三角関数



左のような単位円、その上にある任意の点 (x, y) を考える。
 x 軸からの角度を θ としたとき、

$$x = \cos \theta \quad (\text{余弦})$$

$$y = \sin \theta \quad (\text{正弦})$$

で表され、また $y/x = \tan \theta$ (正接) を定義する。

(性質)

$$\begin{cases} \sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta \\ \cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta \\ \tan(\theta + n\pi) = \tan \theta \end{cases}$$

(周期性)

$$\begin{cases} \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta \\ \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta \end{cases}$$

(位相のずれ)

また、 $\tan \theta$ は $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のみで定義される ($\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3}{2}\pi = 0$)。

主な公式

加法定理

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \end{cases}$$

2倍角の公式

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{cases}$$

半角の公式

$$\sin \frac{2\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad \cos \frac{2\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad \tan \frac{2\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

積和の公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

和差の公式

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

合成の公式

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) \quad \left[\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \beta) \quad \left[\sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]$$

ド・モアブルの定理

複素平面にて $z = \cos \theta + i \sin \theta$ を考える (これは複素平面上の単位円の点にあたる)

$z_1 = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1$, $z_2 = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2$ を考えたとき、諸公式から

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

よ、偏角で表現した複素数の積はその偏角の足し算になる。

であれば、 n 乗する $\rightarrow$ 同じものを n 回かけることに相当するので、

$$z^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \text{ が成立する。}$$

これを ド・モアブルの定理 という。ド・モアブルの定理は複素平面上限定で n 倍角の公式でシンプルに与える。

つまり、 $\mathbb{C}$ 上で整数 n と偏角 θ に対して、

$$\begin{cases} \cos(n\theta) = \frac{1}{2} \{ (\cos \theta + i \sin \theta)^n + (\cos \theta - i \sin \theta)^n \} \\ \sin(n\theta) = \frac{1}{2i} \{ (\cos \theta + i \sin \theta)^n - (\cos \theta - i \sin \theta)^n \} \end{cases}$$

指数関数の別定義

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{そこで } \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ と似た形式を考える。}$$

$n = mx$ という変数変換で、

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mx}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mx} \text{ としたとき、} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \text{ の部分は}$$

e の定義そのものなので $m \rightarrow \infty$ で $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ は e に収束する。

ということで ネイピア数ではなく指数関数を直接 $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ で定義する。

二項定理より、 $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ の右辺は $\frac{n!}{n!(b+1)!(b+1)!} \left(\frac{x}{n}\right)^{b+1}$ なので、

$$n=1 \text{ から順番に計算すると } \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

この $n \rightarrow +\infty$ の極限をとると、右辺の値は一定値に漸近する。

$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ という定義では 極限を含む ので、いかなる値に対しても

e^x は実数であることが明示される。

また、上式の定義は同じ値がマクローリー展開からも得られ、

e^x が微分・積分しても同型という特殊さを表している。

・オイラーの公式

ド・モアブールの定理 $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

ここで $n\theta = x$ とおくと $\cos x + i\sin x = \left(\cos \frac{x}{n} + i\sin \frac{x}{n}\right)^n$ となる。

ここで $n \rightarrow +\infty$ の極限をとると (x 固定し $\theta \rightarrow 0$)、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{n} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{x}{n} = \left(\frac{x}{n}\right) \leftarrow 0 < |x| \text{ なら } \sin \theta \approx \theta \text{ とする近似}$$

であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \frac{x}{n} + i\sin \frac{x}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{n} + i\sin \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + i\frac{x}{n}\right)^n$ と書ける。

(ただし $n \rightarrow \infty$ の極限でのみ成立する変数であることに注意。)

$1/m = ix/n$ と変数変換したとて、 $n \rightarrow \infty$ は $m \rightarrow \infty$ でもあることから、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{imx} = e^{ix} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos x + i\sin x)$$

よって、 $n \rightarrow \infty$ 、 $m \rightarrow \infty$ の極限下においては

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

が成立する。これをオイラーの公式という。

~~オイラーの公式は厳密にはこの時点では複素数上では成り立っていないのだが、~~
後年 e^x の定義を実数 $\rightarrow$ 複素数に拡張するので言え証明されている。

e^x が実数上での定義済み。

オイラーの公式を前提として、

$$\text{加法定理: } e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$\text{ド・モアブールの定理: } (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

とさらにシンプルに表式とすることができる。