

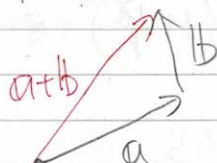
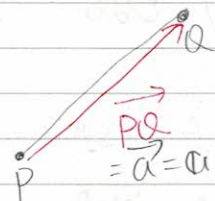
ベクトル pp.37~

ベクトルの性質

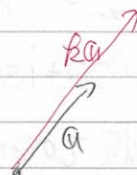
ベクトル自体がもつ性質

幾何ベクトル: 大きさと向きを持つ有向線分

ベクトル a, b を考えると、以下のような計算法則が定義される。



加法 a の終点に b の始点を一致させるように平行移動したとき、 a の始点から b の終点までは $a+b$ となる。



スカラー倍
 a の実数 k 倍は a と平行で、 $k>0$ なら同じ、 $k<0$ なら逆向きを示す。

また、自明だが 加法とスカラー倍の計算結果もまたベクトルとなる。

加法・スカラー倍の性質

- (i) $a+b = b+a$
- (ii) $(a+b)+c = a+(b+c)$
- (iii) $a+0 = a$
- (iv) $a+(-a) = 0$

$$(v) k(a+b) = ka+kb$$

ベクトルの組がもつ性質

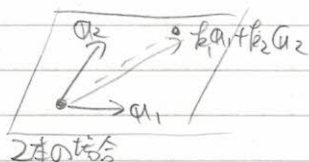
線形結合 ベクトル $a_1, a_2, \dots, a_n$ とスカラー $k_1, k_2, \dots, k_n$ を考えたとき、

$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n$ のことをベクトルの **線形結合** という。

線形結合は平面を1つ定義し、 $k_1 \sim k_n$ の値の組で平面上の1点を指定する

言い換えれば 線形結合は任意本数のベクトルを用いた座標空間である。

(座標軸に相当するベクトルについて、俗な表現として a_1 と a_2 は空間 V を張っている」といふ)



2本の場合

線形独立と線形従属

ベクトル $a_1, \dots, a_n$ とスカラー $c_1, \dots, c_n$ を定義し、 $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n = 0$ となる関係を考える。

この関係について、

スカラーが $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ となる解しかない場合 $\rightarrow$ **線形独立**

他に $c_1 \sim c_n$ が取りうる値がある場合 $\rightarrow$ **線形従属** であるという。

$a_1 \sim a_n$ が線形独立である場合、これら n 本のベクトルは互いに互いの
 和ベクトル・スカラー倍で他のベクトルを表すことはできない。

たとえば a_1, a_2, a_3 というベクトルが線形独立だとした上で、 $a_3 = k_1 a_1 + k_2 a_2$
 を仮定する。

$$C_1 a_1 + C_2 a_2 + C_3 a_3 = 0 \rightarrow (C_1 + C_3 k_1) a_1 + (C_2 + C_3 k_2) a_2 = 0$$

$$\rightarrow C_1 + C_3 k_1 = 0, C_2 + C_3 k_2 = 0 \text{ で、 } C_3 = -C_1/k_1 = -C_2/k_2 \text{ と}$$

明確に他ベクトルの状態に依存する解をもってしまう。

なので、ここで仮定した a_3 は線形従属であり、逆に線形独立なベクトルは
 このような関係をもっていない。

基底、次元、座標系

線形独立なベクトルの組が線形結合してある空間を張る場合、
 その各ベクトルの組を基底という。

また、

この基底がその空間を可足なく示すのに必要なベクトル本数 $\rightarrow$ 次元

ある点を示すための各ベクトルの係数値の組 $\rightarrow$ 座標値

という。

とくに $e_x = (1, 0, 0)$ $e_y = (0, 1, 0)$ $e_z = (0, 0, 1)$ で張る、自然な直交座標系空間
 について、それらの基底を正規直交基底という。

内積

$e_1, \dots, e_n$ を正規直交基底としたとき、 $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ 、 $b = \sum_{i=1}^n b_i e_i$ の間で、

「内積」を $a \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ と定義する。

また、 a 自身の内積からベクトルの大きさ (ノルム) を $\|a\| = \sqrt{a \cdot a}$ と定義する。

正規直交基底自身の内積は同じものどうしなら 1、違うものなら 0 になる。

あるいは任意のベクトルの座標値が不明なら、基底の各ベクトルとの内積で
 座標値の各基底成分を取り出せる。

代数的性質

$$(i) a \cdot b = b \cdot a$$

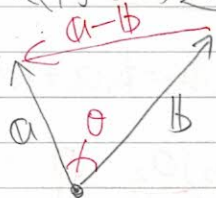
$$(iii) a \cdot kb = k a \cdot b$$

$$(ii) a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(iv) a \cdot a \geq 0$$

(なお (ii)・(iii) を内積の線形性、また逆演算ももてるので双線形性という。)

幾何学的意味



ベクトル a, b に対して差ベクトル $a-b$ を考える. $a-b$ の大きさは

$$\|a-b\|^2 = (a-b) \cdot (a-b) = \|a\|^2 - a \cdot b - b \cdot a + \|b\|^2$$

$$= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2a \cdot b$$

一方, $a-b$ の大きさは余弦定理からも算出できて、

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\|\cos\theta$$

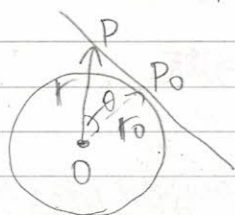
↓ 整理して

$$a \cdot b = \|a\|\|b\|\cos\theta \quad \text{となる.}$$

つまり, a と b の内積は a と b と $a-b$ で書ける三角形で余弦定理を使う
 ことと等しく, 逆に余弦定理を内積の形で表現することもできる.

また, 上式から直交するベクトル同士の内積は大きさを問わず 0 であるとなる.

円の接線の方程式



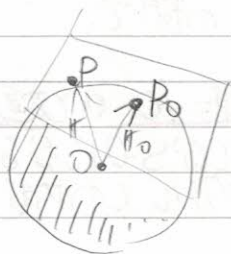
円 O に対して P_0 で接する接線を考える. 接線上は任意の点 P が
 存在する.

$\vec{OP}_0 = \vec{r}_0$, $\vec{OP} = \vec{r}$ としても, $\vec{r}$ は接線上の点で表す
 位置ベクトルであることから, 接線は $\vec{r} - \vec{r}_0$ で表される.

ここで「円の接線は半径と直交するのだから」

$$\vec{r}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \Rightarrow \vec{r}_0 \cdot \vec{r} = r_0^2$$

$\Rightarrow r_0 r \cos\theta = r_0^2$, $r = r_0 / \cos\theta$ となり, P はこの条件を満たす位置にしか
 いることがでる.



同様に球に接する平面についても同じ議論から
 同じ結果が得られる.

「ベクトル自体の次元数にかかわらず」

同じ状況から同じ関係が導ける」のが重要なところ)

抽象化したベクトルの概念と例

幾何ベクトル → スカラー倍と和ベクトルから色々な性質が導かれた。
さらにスカラー倍に対して以下の性質を加えて、ベクトル空間を定義する。

$$\begin{aligned} (vi) & (k+l)a = ka + la \\ (vii) & k(la) = (kl)a \\ (viii) & 1a = a \end{aligned}$$

幾何ベクトルのうち+と $\cdot$ を加えた3つを合わせて、ベクトル空間の公理という。

また、内積もベクトル自体とは別の性質を持ち、それらを公理として導入することによってベクトルの内積や角度を扱えるようにする。

内積を取り込んで拡張したベクトル空間を計量ベクトル空間という。

とらなる拡張の例……

n次元の実数ベクトル空間 ($\mathbb{R}^n$)

要するに $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, $b = \sum_{i=1}^n b_i e_i$ なる空間のこと

$$a+b = \sum_{i=1}^n (a_i+b_i)e_i, \quad k a = \sum_{i=1}^n k a_i e_i$$

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad \text{となるのは } e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \text{ で自明である}$$

複素ベクトル空間 ($\mathbb{C}$)

$a = a_1 + i a_2$, $b = b_1 + i b_2$ に対して

$$a+b = (a_1+b_1) + i(a_2+b_2) \quad k a = k a_1 + i k a_2 \quad \text{となるまでは自明}$$

(複素数自体はもともと線形性がある)

ここで、 $e_1 = 1 (= \text{Re}(1))$, $e_2 = i (= \text{Im}(1))$ と与えることとする。

$$a \cdot b = \frac{1}{2} (a \cdot a^* + b \cdot b^* - (a-b) \cdot (a-b)^*)$$

$$= \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1-b_1)^2 - (a_2-b_2)^2) = \frac{1}{2} (2a_1 b_1 + 2a_2 b_2)$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad \text{と、複素数の性質に則ってもベクトルの性質に則っても最終的な結果は変わらない。}$$

関数ベクトル空間

$a = f(x)$, $b = g(x)$ としたとき

$$\begin{cases} a+b = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ k a = k f(x) \end{cases}$$

$$a \cdot b = \int f(x) g(x) dx \quad \leftarrow \text{畳み込み積分}$$

とすることで $a = f(x)$ と $b = g(x)$ を定めると、関数がベクトルとして機能する。

たとえば $a = \cos x$, $b = \sin x$ としたとき、 a も b も基底として機能する。

(フーリエ変換で実数のみで表現する場合)

ベクトル積

外積: 二つまでのベクトルの公理や性質と違い、3次元空間でのみ定義される
 $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$ に対して、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3$$

$$= \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \quad (\text{成分表記})$$

代数的性質

$$\begin{array}{l} \text{(i)} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (\Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}) \\ \text{(ii)} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \\ \text{(iii)} (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{array}$$

また、ベクトル積の性質として

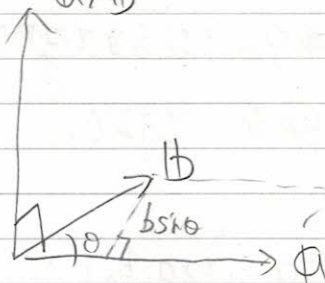
$$\text{スカラー3乗積: } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\text{ベクトル3乗積: } \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

$$\text{外積の内積: } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

幾何学的意味

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$



$$\begin{aligned} \text{ただし: } \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

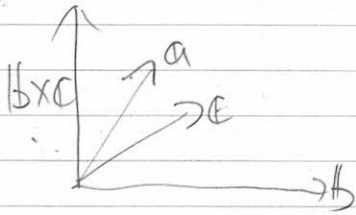
$\therefore \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin \theta$
 $\mathbf{a}$ を基準として見たとき、 $\sin \theta$ は $\mathbf{a}$ に垂直の
 高さになるので、長さ $\mathbf{a}$ 、高さ $\mathbf{b}$ の平行四辺形の面積に
 等しい。

向も: 正交直交基底 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ を考えたとき、外積の定義から

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

$\Rightarrow$ 前のベクトルから後のベクトルに向けて右ねじで回したとき、右ねじの向きが外積の向也。これは $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のような一般のベクトルでも同様。

スカラー三重積



$b \times c$ の大きさが平行四辺形、
そこに a と内積して高の成分が入るので、
これは a, b, c それぞれを辺としてつ
平行六面体の体積。
(ただし $b \times c$ と a によって符号 $\Rightarrow$ 向きが変わる。)