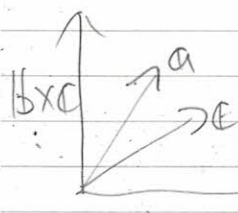


PR53~68

スカラー3重積



$b \times c$ の大きさが平行四辺形、
 そこに a と内積して高みの成分が入るので、
 これは a, b, c それぞれを辺としてつ
平行六面体の体積、
 (ただし $b \times c$ と a によって符号 $\Rightarrow$ 向きが変わる。)

• n 本のベクトルが張る n 次元体積

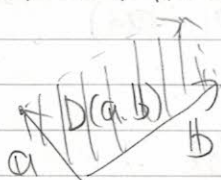
2次元 $\rightarrow$ 外積 $\Rightarrow$ 面積

3次元 $\rightarrow$ スカラー3重積 $\Rightarrow$ 体積

n 次元 $\rightarrow$???

• 2次元体積 = 面積

2本のベクトル a, b が張る面積 $\rightarrow D(a, b)$ と定義



ベクトルの性質から $D(a, b)$ は

$$(i) D(a_1 + a_2, b) = D(a_1, b) + D(a_2, b)$$

$$(ii) D(k a, b) = k D(a, b)$$

$$(iii) D(a, a) = 0$$

$$\Rightarrow D(b, a) = -D(a, b)$$

$$(iv) D(e_1, e_2) = 1 \quad (\text{ただし } e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$$

* $a = a_1 e_1 + a_2 e_2, b = b_1 e_1 + b_2 e_2$ とする、

$$D(a, b) = D(a_1 e_1 + a_2 e_2, b_1 e_1 + b_2 e_2) = D(a_1 e_1, b_1 e_1) + D(a_1 e_1, b_2 e_2) + D(a_2 e_2, b_1 e_1) + D(a_2 e_2, b_2 e_2)$$

$$= a_1 b_1 D(e_1, e_1) + a_1 b_2 D(e_1, e_2) + a_2 b_1 D(e_2, e_1) + a_2 b_2 D(e_2, e_2)$$

$$= a_1 b_2 D(e_1, e_2) - a_2 b_1 D(e_1, e_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

これは a, b が z 軸 0 のときの $\|a \times b\|$ に相当する、

$$(a = (a_1, a_2, 0), b = (b_1, b_2, 0) \text{ と仮定して } a \times b = (0, 0, a_1 b_2 - a_2 b_1).)$$

• 3次元体積 = 体積

上記を3次元に拡張すると、

$$(i) D(a_1 + a_2, b, c) = D(a_1, b, c) + D(a_2, b, c)$$

$$(ii) D(k a, b, c) = k D(a, b, c)$$

$$(iii) D(a, a, b) = 0 \quad (\Rightarrow D(b, a, c) = -D(a, b, c))$$

$$(iv) D(e_1, e_2, e_3) = 1$$

という性質をもつので、添字 i, j, k に対して、

$$D(e_i, e_j, e_k) = \begin{cases} 1 & (ijk) = (123), (231), (312) \\ -1 & (ijk) = (132), (213), (321) \\ 0 & (\text{上記以外の}(ijk)) \end{cases}$$

が成り立つ。

また、 $D(a, b, c)$ はこれで一意にもまり、

たとえば $a = (a_1, a_2, a_3)$ $b = (b_1, b_2, b_3)$ $c = (c_1, c_2, c_3)$ に対して

$$D(a, b, c) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

だが、これは上定義時のスカラー三重積 $a \cdot b \times c$ の計算結果そのものである。

⇒ n 次元体積

さらに n 次元に拡張して、

$$(i) D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + a_{i+1}, \dots, a_n) = D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_n) + D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$(ii) D(a_1, \dots, k a_i, \dots, a_n) = k D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

$$(iii) D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i, \dots, a_n) = 0$$

$$\Rightarrow D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -D(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

$$(iv) D(e_1, \dots, e_n) = 1$$

つまり添字 $1, \dots, n$ について、

$$D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \begin{cases} 1 & (i_1, \dots, i_n) \text{ は } (1, \dots, n) \text{ の偶置換} \\ -1 & (i_1, \dots, i_n) \text{ は } (1, \dots, n) \text{ の奇置換} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

である。

n 次元で (i) (ii) が成り立つことを 多次線形性、(iii) が成り立つことを 交代性 といふ。

これを前提として、

$$(1) D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + k a_j, \dots, a_j, \dots, a_n)$$

$$= D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n)$$

※ あるベクトルのスカラー倍を他のベクトルに加えて、 D は不変となる。

$$(2) a_1, \dots, a_n \text{ が線形従属なとき、} D(a_1, \dots, a_n) = 0$$

※ 線形従属なベクトルの組に対し、 D は常に 0 となる。

もいえることがわかる。

◦ Levi-Civita 記号

ϵ_{ijk} を Levi-Civita 記号 という添字 ijk に対して、

$$\text{Levi-Civita 記号 } \epsilon_{ijk} \text{ は } \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) = (123) (231) (312) \\ -1 & (ijk) = (132) (213) (321) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

* (123) は正
 * (321) は逆
 * (213) は逆

となる。

二枚を使うと、ベクトル $a = (a_1, a_2, a_3)$ $b = (b_1, b_2, b_3)$ に対し、

$$a \times b = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k e_i \quad \text{と書けるようになる。}$$

・ Levi-Civita 記号の性質

$$\begin{cases} \text{(i)} & \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} \\ \text{(ii)} & \epsilon_{ijj} = 0 \\ \text{(iii)} & \epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} \end{cases}$$

※ 3次元体積とほぼ同じ性質をもつことに注意。

・ Levi-Civita 記号の積

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

(δ_{ab} は クラネッカー のデルタ、

$a=b$ で $\delta_{ab}=1$ 、 $a \neq b$ で $\delta_{ab}=0$)

◦ 拡張 Levi-Civita 記号: n 次元

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 1 & (i_1 \sim i_n) \text{ が } (1 \dots n) \text{ の偶置換} \\ -1 & (i_1 \sim i_n) \text{ が } (1 \dots n) \text{ の奇置換} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

偶置換: ある順番への並びかえが偶数回必要なこと

奇置換: ある順番への並びかえが奇数回必要なこと

※ ただし「ある順番」の達成方法によらず、この偶奇は決まらなければならない。

拡張 Levi-Civita 記号は拡張前と同じ性質をもつ

○置換と転倒数の偶奇性 (読み取めるのに必須の部分のみかいて))

転倒と転倒数

転倒: 添字 j, k と数 i_j, i_k について、添字は $j < k$ と大々くっているのに
数は $i_j > i_k$ と小さくなること

転倒数: ある順列についての転倒の発生回数

言い換えとある数より先の順列で、その数より大きい数がいくつあるか、
それを順列すべての数で数えた合計のこと。

転倒数の符号

$i_1, \dots, i_n$ の転倒数が偶数なら 1、奇数なら -1 とする。 $\varepsilon(\text{順列})$ と記し、

$$\varepsilon(i_1, \dots, i_n) = \begin{cases} 1 & (\text{転倒数: 偶数}) \\ -1 & (\text{転倒数: 奇数}) \end{cases}$$

隣接互換と転倒数符号

隣り合う数字を入れかえると、定義から必ず転倒数が 1 増減する

$$\text{よって } \varepsilon(\dots, i_j, i_{j+1}, \dots) = -\varepsilon(\dots, i_{j+1}, i_j, \dots)$$

任意の数の互換と転倒数符号

実は上記は隣り合っても必ず「起こりうることで」

$$\varepsilon(i_1, \dots, i_j, \dots, i_k, \dots, i_{j+1}, \dots, i_k, \dots, i_j, \dots, i_k) = -\varepsilon(i_1, \dots, i_{j+1}, \dots, i_k, \dots, i_j, \dots, i_k, \dots, i_{j+1}, \dots, i_k)$$

※「隣接互換で符号が変わる」と「転倒数は並びのみに依存して決まる」の合わせ技

ある 2 つの数だけをに入れかえるとも、隣接互換が $2k-1$ 回あるため
必ず符号が変わる。

○置換と転倒数の偶奇性は一致する。