

行列Ⅰ: 連立一次方程式 pp.69~88

行列 ← 連立方程式の解法探求が大元
これは必ずやる。

掃き出し法

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+y+3z=13 \\ x+2y+4z=17 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & 17 \end{array} \right] \begin{matrix} \text{--- ①} \\ \text{--- ②} \\ \text{--- ③} \end{matrix}$$

掃き出し法の記法 (※これはまた「行列」とは言わない)
要するに、左の1行が方程式、1列が変数係数に1:1対応。
いうわけで、この連立方程式のように整理してる。

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

①で②③1列目を0に

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

②で①③2列目を0に

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

③で①②3列目を0に

左を全て0にする

両辺の定数倍

両辺の定数倍を別の式に加える

の2つが掃き出し法でやる操作。

掃き出し法と行基本変形

言葉の定義、下のような掃き出し法のカタマリに対して、

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & 17 \end{array} \right]$$

点線左側を係数行列

掃き出し法形式の書き方自体を拡大係数行列という。

行 係数行列 拡大係数行列

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

横に並んだ数字を行、縦に並んだ数字を列。
また列で最初に出てくる0でない数字を主成分という。

主成分

上で連立方程式とみなして行った操作のことを行基本変形という。
行基本変形は式の上で入れかえもアウスして、以下のように書ける。

- (i) ある行を定数倍する。
- (ii) ある行の定数倍を別の行に加える。
- (iii) ある行と別のある行を入れかえる。

また、掃出し法のラストで目指す、対角線が1であとは0の行列を
簡約行列という、もう少し用語を使うと、

- (i) 主成分は1 (ii) 主成分以外は0
 (iii) 下の行ほど主成分は右にある
 (iv) すべての成分が0となる行はそうでもない行の下側にある

・不定解/解なしの場合

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1+a \end{array} \right] \text{を考える。} a \text{ は } x, y, z \text{ には依存しない定数}$$

→ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -1+a \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right]$ 2/3行目の左側は等しく、
 右側が a の有無のみ違う

(i) $a \neq 0$ とすると……

$0 = a$ 明らかに矛盾
 よって 解なし

(ii) $a = 0$ とすると、実質上2行のみの式

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

⇒ $\begin{cases} x = z \\ y + 3z = 1 \end{cases}$ を同時に満たす範囲で
不定解とする。

不定解は、たとえば $z = t$ とおいて、

$$\begin{cases} x = t \\ y = -3t + 1 \\ z = t \end{cases} \text{ とパラメータ表示} \\ \text{することがある。}$$

このパラメータの変数の数も解の自由度という

簡約行列の主成分の数を 階数 (rank) という。 n 行の拡張係数行列が定まった解をもつには rank = n である必要がある、そうでなければ $n - \text{rank}$ の解の自由度で不定解としてしまう。

・連立一次方程式の違う見かた

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+5y=12 \end{cases}$$

掃き出し法だと $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 12 \end{array} \right]$

少し違う書き方をしてみる。

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} \text{ はそれぞれベクトル。}$$

またスカラー倍がでるとも考える。左辺をほぐして $\begin{bmatrix} x+2y \\ 2x+5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$ とベクトル1個で表す

不定解とする組でも同様に

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x+6y=15 \end{cases} \quad x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow (x+2y) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

つまり、

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases} \Rightarrow x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

ここで、ベクトル2個 $D(a, b)$ を再導入する。

$$a = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \text{ とする。}$$

$$D(a, b) = D\left(x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = x D\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) + y D\left(\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) \\ = x D\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$$

同様に、 $a = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ として、 $D(a, b) = y D\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$

よって、 $x = \frac{D\left(\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)}{D\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)} \quad y = \frac{D\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}\right)}{D\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)} \quad (\text{ただし } D\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) \neq 0)$

$\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+5y=12 \end{cases}$ の例では、 $x = D\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = 5 \times 5 - 12 \times 2 = 1$

$$y = D\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}\right) = 1 \times 12 - 2 \times 5 = 2$$

↓

n元まで拡張して、関数Dに係数行列のベクトルをそのまま入れたもの、および「右辺部」で1個ずつベクトルを置きかえたものを計算することで理論上各変数の解は同様に求まる。

この解き方をクラメル法則(クラメルの公式)という。

行列式の導入

変数 $x_1, \dots, x_n$, 係数をベクトルで $a_1, \dots, a_n$, 右辺をベクトルで b としたとき、 n 元連立 1 次方程式は $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = b$ とかける。

このとき、

(i) $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = b$ について、 $a_1, \dots, a_n$ は線形結合している。

このまま変形しつづけると、最終的に $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x$ として、標準基底 $e_1, \dots, e_n$ の線形結合として解のベクトル x を得る操作になる。

$\Rightarrow$ 掃き出し法は線形結合を保つ。

(ii) rank は $a_1, \dots, a_n$ のうち線形独立なベクトルの数と等しくなる。

(iii) D の定義 および " n 本のベクトル $a_1, \dots, a_n$ で n 次元のベクトル b は一意に表される" ことから、クラマルの法則で表される解は一意に決まる。

$\Downarrow$ これを踏まえて

行列を定義しなおす。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{行 } i \\ \rightarrow \text{列 } j \end{matrix}$$

i 行 j 列の成分を a_{ij} と書く。
列の並びをベクトルとして見ると、

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow a_1, a_2, a_3$$

$$\text{基底ベクトルと合わせて } A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} e_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} e_2 + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} e_3 = \sum_{i=1}^3 a_i e_i$$

などとも書ける。

行列式の定義

関数 $D(a, b)$ に行列をそのまま突っ込むことを考える。2 次元の場合

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij} a_{i1} a_{j2} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

この $D(A)$ 、正しい行列成分を i, j と入れて縦横 2 本で「選んだ量のこと」を行列式という。3 次元までだと「サラスの法則」というたすきがけの要る方法で求められる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - (a_{13} a_{22} a_{31} + a_{12} a_{23} a_{21} + a_{23} a_{11} a_{32})$$

n 次元になったら Levi-Civita 記号での表式になる。(サラスのおまじないは抗死せよ！)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \varepsilon_{i_1, \dots, i_n} a_{1i_1} \dots a_{ni_n}$$

行列式の性質 I

基本的に $D(A, B)$ の性質は全て持つ。(以下式は略.)

- (i) ベクトル和に対する多重線形性
- (ii) スカラー倍に対する多重線形性
- (iii) ベクトル間の交代性
- (iv) 簡約行列の行列式の値は 1
- (v) ある列のスカラー倍を別の列に加えても行列式の値は変わらない
- (vi) 本でも線形従属なベクトルがあれば行列式の値は 0
(= 行列式が 0 以外ならそのベクトルの組は線形独立)

加えて、3 次行列のサラスの方法でなんとなくわかるが、行列式 (あくまで行列式のみで逆置行列の値ではない...) では、行と列が完全に対等で、行と列を入れかえた行列 (転置行列) について、

- (vii) 転置行列ともとの行列は行列式が等しい。となる。

また、これらによって行列式に対しての行基本変形が考えられ、

- (viii) (A) ある行を定数倍して他の行に加えても、行列式の値は変化する。
- (B) ある行を定数倍すると、行列式の値も定数倍される。
- (C) ある行と別の行を入れ替えると、行列式の符号が変わる。

加えて、Levi-Civita 記号で定義されることからたとえば 4 次の行列で、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

としたとき、定義から網かけした部分の行列式を a_{11} 倍したのと
同じ値になる。
(もう少し詳しくかいた.)

$$\sum_{j,k,l=1}^4 \epsilon_{ijkl} a_{1i} a_{2j} a_{3k} a_{4l} = a_{11} \sum_{j,k,l=1}^4 \epsilon_{1jkl} a_{2j} a_{3k} a_{4l}$$

(ix) 行列式の次段下げ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

また、次段下げの適用回数に制限はないので、例えば

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} = \underline{a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}}$$

↑ 1 はどうなるか
← これは 2 次の行列式で省略。

と連続して使用し、一切行列式計算をしないこともできる。