

Pr. 88 ~ 108

○ 行列の導入

掃出し法 の形式

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array} \right]$$

行列、および行列の逆の形式!

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} e \\ f \end{array} \right]$$

・ 行列とその演算の定義

行列: 数/式を $n \times m$ 個縦横に並べたもの.

└ 行列の **成分**: 並べられた各数/式 1 つのこと.

└ **正方行列**: $n=m$ のとき、縦横が同じ数並んでいる行列.

行: たて

列: よこ.

ある行にある全列の数/式を並べたものを **行ベクトル**.

ある列にある全行の数/式を並べたものを **列ベクトル** という.

$n \times m$ 行列は n 行 m 列の行列.

成分: (n, m) 成分はその行列の n 行 m 列目成分を示す.

添字を使う場合は a_{ij} .

表記: 直接成分を括弧内に書き下す以外にも、大文字のアルファベットで置きかえて表すこともある.

この場合、行列式を $|A|$ とか $\det(A)$ とか書くことがある.

対角行列: 行と列の番目が一致する

単位行列: 対角行列のうち特に、

$$\left[\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{array} \right] \text{ 成分 } a_{ij} \text{ を } \underline{\text{対角成分}} \text{ といふが、}$$

その対角成分のみが 0 でない.

他にもった行列のこと.

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ 対角成分が全て 1 になっている行列のこと、}$$

E , I と略記する.

零行列: 全成分が 0 の行列. **転置行列**: ある行列 A の行と列を入れかえた行列.

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$A = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \quad {}^t A = \left[\begin{array}{cc} a & c \\ b & d \end{array} \right] \text{ その行列 } A \text{ の左か右肩に } {}^t \text{ をつけて、} A^t \text{ とか } {}^t A \text{ とか表す.}$$

和とスカラー倍:

$$A = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \quad B = \left[\begin{array}{cc} e & f \\ g & h \end{array} \right] \text{ のとき、}$$

和: $A+B = (A+B)$

スカラー倍: $kA = (kA)$

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} e & f \\ g & h \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{array} \right]$$

$$k \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} ka & kb \\ kc & kd \end{array} \right]$$

行列と列ベクトル / 行ベクトルと行列の積

※教科書の方針上、以降正方行列と行列ベクトルしか出てこないが、
基本的に $l \times m$ 行列 A と $m \times n$ 行列 B の積 AB は $l \times n$ 行列になる。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \end{bmatrix}$$

行ベクトルと列ベクトル / 列ベクトルと行ベクトルの積

$$\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & \dots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

(スカラ値)

行列と行列の積

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw+bx & ax+bz \\ cw+dx & cx+dz \end{bmatrix} \quad (\text{左の行をそれぞれ} \times \text{右の列をそれぞれ、と読む})$$

行列の基本性質: 正方行列 A, B, C と単位行列 E 、零行列 O 、スカラー k, l に対して

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} A+B=B+A & \text{(ii)} (A+B)+C=A+(B+C) \\ \text{(iii)} A+O=O+A=A & \text{(iv)} A+(-A)=(-A)+A=O \\ \text{(v)} k(A+B)=kA+kB & \text{(vi)} (k+l)A=kA+lA \\ \text{(vii)} k(1A)=(k1)A & \text{(viii)} 1A=A, (-1)A=-A \\ \text{(ix)} OA=O, kO=O \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} (AB)C=A(BC) & \text{(ii)} (A+B)C=AC+BC, A(B+C)=AB+AC \\ \text{(iii)} AE=EA=A & \text{(iv)} OA=AO=O \end{array} \quad \text{(v)} \text{はABCが全て証明できないと成らない。}$$

連立1次方程式の行列表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ とおける}$$

$AX=B$ と一次方程式のようにかける。

ということは、 $X=A^{-1}B$ となるような $n \times n$ 行列 A^{-1} を用いて、 X を行列の形で表せるのである。

ここでは定義した通りの式で掃出し法を仮して A' を求めてみる.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & | & b_1/a_{11} \\ 0 & a_{22}/a_{21} & a_{23}/a_{21} & | & b_2/a_{21} \\ 0 & a_{32}/a_{31} & a_{33}/a_{31} & | & b_3/a_{31} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & | & b_1/a_{11} \\ 0 & a_{22}/a_{21} - a_{12}/a_{11} & a_{23}/a_{21} - a_{13}/a_{11} & | & b_2/a_{21} - b_1/a_{11} \\ 0 & a_{32}/a_{31} - a_{12}/a_{11} & a_{33}/a_{31} - a_{13}/a_{11} & | & b_3/a_{31} - b_1/a_{11} \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & (a_{13}/a_{11})/(a_{12}/a_{11}) & | & (b_1/a_{11})/(a_{12}/a_{11}) \\ 0 & 1 & (a_{23}/a_{21} - a_{13}/a_{11})/(a_{22}/a_{21} - a_{12}/a_{11}) & | & (b_2/a_{21} - b_1/a_{11})/(a_{22}/a_{21} - a_{12}/a_{11}) \\ 0 & 1 & (a_{33}/a_{31} - a_{13}/a_{11})/(a_{32}/a_{31} - a_{12}/a_{11}) & | & (b_3/a_{31} - b_1/a_{11})/(a_{32}/a_{31} - a_{12}/a_{11}) \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & (a_{13}/a_{11})/(a_{12}/a_{11}) - (a_{23}/a_{21} - a_{13}/a_{11})/(a_{22}/a_{21} - a_{12}/a_{11}) & | & (b_1/a_{11})/(a_{12}/a_{11}) - (b_2/a_{21} - b_1/a_{11})/(a_{22}/a_{21} - a_{12}/a_{11}) \\ 0 & 1 & (a_{23}/a_{21} - a_{13}/a_{11})/(a_{22}/a_{21} - a_{12}/a_{11}) & | & (b_2/a_{21} - b_1/a_{11})/(a_{22}/a_{21} - a_{12}/a_{11}) \\ 0 & 0 & ()/() - ()/() & | & (b_3/a_{31} - b_1/a_{11})/(a_{32}/a_{31} - a_{12}/a_{11}) - (b_2/a_{21} - b_1/a_{11})/(a_{22}/a_{21} - a_{12}/a_{11}) \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \dots \\ 0 & 1 & 0 & | & \dots \\ 0 & 0 & 1 & | & (b_3/a_{31} - b_1/a_{11})/(a_{32}/a_{31} - a_{12}/a_{11}) - (b_2/a_{21} - b_1/a_{11})/(a_{22}/a_{21} - a_{12}/a_{11}) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

...とおそろしく長大な式展開になるが、今点検のところが A' になっているので.

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11}b_1 + a'_{12}b_2 + a'_{13}b_3 \\ a'_{21}b_1 + a'_{22}b_2 + a'_{23}b_3 \\ a'_{31}b_1 + a'_{32}b_2 + a'_{33}b_3 \end{bmatrix} \text{ の形を定数として整理する. }$$

$$A' = \begin{bmatrix} -1/a_{11}(a_{32}/a_{31} - a_{12}/a_{11}) + 1/a_{11}(a_{22}/a_{21} - a_{12}/a_{11}) & -1/a_{21}(a_{32}/a_{31} - a_{12}/a_{11}) & 1/a_{31}(a_{22}/a_{21} - a_{12}/a_{11}) \\ (a_{33}/a_{31} - a_{13}/a_{11})/(a_{32}/a_{31} - a_{12}/a_{11}) - (a_{23}/a_{21} - a_{13}/a_{11})/(a_{22}/a_{21} - a_{12}/a_{11}) & & \end{bmatrix}$$

いや、やはり長大ではあるが一意に定まることはわかる.
掃出し法をただの数値でやればこの A' はわかりわかる.
ではこれを公式として定式化はできるのか?

行列式の性質

行列 A の行列式 $\det(A)$ を考える。めんどうなので 3 次で限定する。

$\det(A)$ は Levi-Civita 記号を使って $\det(A) = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$ と定義されていた。
添字 (l, m, n) が (i, j, k) の置換としたときに、

$$D(a_l, a_m, a_n) = \begin{cases} +\det(A) & (l, m, n \text{ は偶置換}) \\ -\det(A) & (l, m, n \text{ は奇置換}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \Rightarrow D(a_l, a_m, a_n) = \epsilon_{lmn} \det(A) \text{ となる.}$$

一方 $D(a_l, a_m, a_n) \neq 0$ 、 $D(a_l, a_m, a_n) = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_{li} a_{mj} a_{nk}$ とかける。

よって $\det(A) = \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^3 \sum_{l,m,n=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} a_{li} a_{mj} a_{nk}$ かつ $\det(A) = \det(A^T)$ ということになる。

また同様の議論から $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ も成分を問わず成立する。