

26/9/14

行列Ⅱ:線形変換

pp.109~125

(おてらい)

1次方程式

$$ax=b$$

連立1次方程式

$$a_1x_1=b_1$$

$$a_2x_2=b_2$$

行列形式の表記

$$Ax=b$$

 $\Updownarrow$ 移項など

$$y=ax$$

1次元級

$$y=Ax$$

↑これは?

○線形変換(一次変換): ベクトル x を行列 A によって ベクトル y に移すこと

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ を考える. 一次変換 } y=Ax \text{ は}$$

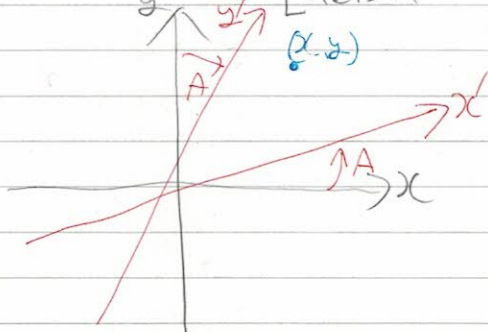
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

 $\Rightarrow$ 座標 (x_1, x_2) の点 A によって $(a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$ に移されることを意味するまた x を基底 e_1, e_2 で解釈すると、

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 \Rightarrow y = x_1Ae_1 + x_2Ae_2 = x_1e'_1 + x_2e'_2 (\dots Ax)$$

このとき、もとの標準基底 e_1, e_2 が行列 A によって別の基底 e'_1, e'_2 に変換を受けたと解釈できる。

$$\Rightarrow e'_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, e'_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

これを座標軸で解釈すると、もとの座標 (x, y) の絶対的な位置は実は変わっていないのだが、座標軸のほうが単位直交座標から変換されたため、新たな座標軸での値に変わって見えている、という。

2x2行列についてはいくつか有名な変換行列がある。

スケール変換

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

(それぞれa倍、b倍)

剪断変換

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(平行変形)

回転変換

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

(角度 θ 回転する)

○逆行列: 行列の逆数にあたるもの

Aに対してAが逆行列とすると、 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ が成り立つ

余因子展開と転の行列

3次の行列Aに対して、

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

1列めの3行それぞれで「くり出して」いて、次数下げしたわけだが、

次数下げした後の行列はくり出した成分 a_{ij} と同一行/同一列を省いて作った、
一回り小さい行列のようになっている。(1行行列という、必ずからSMJとあそび)

同様に、2列目/3列目について、

$$\begin{aligned} \det(A) &= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \quad (2列目) \\ &= a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (3列目) \end{aligned}$$

各項の正負は「くり出した成分の位置について、

$i+j$ が奇数なら負、偶数なら正と決まっている。

厳密には「くり出しのための入れ替え回数 $(i-1)+(j-1)$ 回正負が反転しており、

この入れ替え回数による正負反転 $(-1)^{i+j}$ を小行列の行列式 M_{ij} につけた、

$(-1)^{i+j} M_{ij}$ を a_{ij} の余因子 いう。 $\hat{a}_{ij}$ とか C_{ij} とかです。

以上の話はそのまま次に拡張される。このようにしてある行列Aの成分を展開することを余因子展開という。

余因子展開はあらゆる行列式で成立するので、2階以上の行列式の性質ととらえる。

行列 A ($n \times n$) に対して、

(xi) 列に対する余因子展開: $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij}$

(xii) 行に対する余因子展開: $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} a_{ji} M_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{ji} \tilde{a}_{ji}$

(xiii) 行列 A, B がかけ算可能なら、 $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

・逆行列の定義と余因子行列による表示

再度定義、ある行列 A に対し $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ となる行列 A^{-1} があるとき、
その A^{-1} を A の逆行列という。

一旦、可換性の話は忘れて、 $AX = E$ となる X について考える。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

このままだけでも構わないが、長すぎるので A と X の列ベクトル a_i と x_i で整理して、

$$\begin{cases} AX_1 = e_1 \\ AX_2 = e_2 \\ AX_3 = e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_{11}a_1 + x_{21}a_2 + x_{31}a_3 = e_1 \\ x_{12}a_1 + x_{22}a_2 + x_{32}a_3 = e_2 \\ x_{13}a_1 + x_{23}a_2 + x_{33}a_3 = e_3 \end{cases}$$

関数 D に a_1, a_2, a_3 を代入すると、

$$\begin{cases} D(e_j, a_2, a_3) = x_{1j} D(a_1, a_2, a_3) = x_{1j} |A| = \tilde{a}_{j1} \\ D(a_1, e_j, a_3) = x_{2j} D(a_1, a_2, a_3) = x_{2j} |A| = \tilde{a}_{j2} \\ D(a_1, a_2, e_j) = x_{3j} D(a_1, a_2, a_3) = x_{3j} |A| = \tilde{a}_{j3} \end{cases}$$

↑ これは余因子を指す。

$$\Rightarrow \tilde{a}_{ji} = x_{ij} |A|$$

※ 行と列の添字が入れ替わるのに注意!

なので、 A の余因子を順番に代えて転置した行列 (余因子行列) $\tilde{A}$ を、

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \quad \text{とおいえて、} \quad X = \frac{1}{|A|} \tilde{A} \quad \text{で} \quad X \text{ が求められる。}$$

同様に、 $YA=E$ を満たす Y については、

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

今度は行ベクトル y_i と a_j を4行に
まとめる、
($\times$ X のときや a の1行と列ベクトルの
積として表現する。)

$$\begin{cases} y_1 A = {}^t E_1 \\ y_2 A = {}^t E_2 \\ y_3 A = {}^t E_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_{11} a_1 + y_{12} a_2 + y_{13} a_3 = {}^t E_1 \\ y_{21} a_1 + y_{22} a_2 + y_{23} a_3 = {}^t E_2 \\ y_{31} a_1 + y_{32} a_2 + y_{33} a_3 = {}^t E_3 \end{cases}$$

これもやはり解くと余因子行列 $\tilde{A}$ が出てきて、

$$\tilde{a}_{ji} = y_{ij} |A|, \quad Y = \frac{1}{|A|} \tilde{A} \text{ と求まる。}$$

$AX=E$ となる X と $YA=E$ となる Y の形は完全に一致しており、
つまり可換性が示されている。

$$\text{よって } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} \text{ は } A^{-1} A = A A^{-1} = E \text{ を満たす。}$$

(ちなみに、 $|A|=0$ となる行列は定義から明らか通り逆行列が存在しない。)

・逆行列 / 正則行列の性質

(i) 逆行列は一意的に定まる。

(ii) 逆行列の行列式は行列式の逆数。

(iii) 行列 A, B の積 AB の逆行列は逆行列 A^{-1}, B^{-1} の逆順の積 $B^{-1}A^{-1}$ 。

(iv) $AX=E$ か $XA=E$ のどちらかが成立した時点で、 X は A の逆行列 A^{-1} 。

また、 n 次の正則行列 A について、

(i) A が正則行列である。

(ii) $\det(A) \neq 0$

(iii) $AX=0$ が自明な解のみをもつ。

(iv) A を列ベクトルの組とみれば、
そのそれぞれが線形独立。

(v) $\text{rank}(A) = n$

以上5項目はすべて同値を意味するので、どれか一つでも証明できれば
残りの性質は天下りに使えることができる。

ちなみに…… $AX=b$ をクラメル法則で解いた解と逆行列で解いた解は
同じになる。(計算省略だが、両方に左から A^{-1} をかけた解 $X=A^{-1}b$ は
気合で全成分展開するとクラメルの公式の解と展開形が一致する。)