

26/9/16

pp.125 ~ pp.142

○直交行列

・転置行列: ある行列 A, B に対し、

(i) $(AB)^T = B^T A^T$

(ii) $(A^T)^T = (A^{-1})^T$

・ベクトルの内積

どちらも行ベクトルか列ベクトルであるベクトル x, y に対して $x \cdot y = x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ と内積を定義しておく。

・直交行列の定義

ある行列 R が $RR^T = R^T R = E$ を満たすとき、その R を直交行列という。直交行列 R について、

(i) R は正則行列で、 $R^{-1} = R^T$

(ii) $\det(R) = \pm 1$

(iii) ある直交行列 R_1, R_2 に対し、その積 $R_1 R_2$ も直交行列。(iv) $R^T R = E$ と $RR^T = E$ のどちらかを満たせば R は直交行列。 R を 3×3 行列として、

$$RR^T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 1$$

$$r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} = (\text{内積}) = 0$$

直交行列 R に対して、

(i) R は直交行列である

(ii) R で線形変換しても内積が変換前と変わらない。 $[R\mathbf{x} \cdot R\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}]$

(iii) R で線形変換してもノルムが変換前と変わらない。 $\|R\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$

(iv) R を行ベクトル (or 列ベクトル) の組とみても、その組は正規直交基底をなす。はたして同値のことも示す。

直交行列による線形変換は ベクトルのノルム/内積が不変な変換 となる。
 $\Rightarrow$ 等長変換。

2次元の回転行列で考えると、

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad R R^T = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow R$ は直交行列。

また $\det(R) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ であり、

であるから 回転行列 が 2つ R_1, R_2 あると、 $R_1 R_2$ は $\theta_1 \rightarrow \theta_2$ で 2連続回転することになる。

$$\text{実際、} R_1 R_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 & -\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 & -\sin\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

回転行列による回転操作は単純に角度の足し算で省略できる。

・線形変換の行列による表示

前提……ベクトルという概念は基底によらず一定

しかしベクトルという表示は与った基底に依存する。

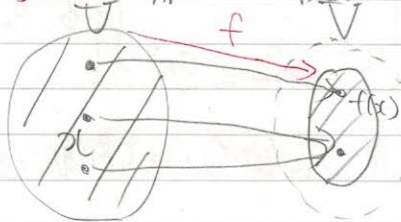
$\downarrow$

ベクトルを複数組み重ねた行列もまた基底に依存して表示が変わる。

このため、以下の議論を進めるため、まず行列という概念を抽象化する必要がある。

・各種定義

写像：一般化した関数の概念。



集合 U の元を V の元に写す写像を $f: U \rightarrow V$ と書く。
 f と書くが関数と違い、全ての写像が 1:1 対応しているとは限らない。

$U \rightarrow V$ の写像が 1:1 かつ U と V が等しいと、
逆写像 f^{-1} が定まる。

合成写像: $U \ni x \rightarrow V \ni y = f(x)$ となる f と、 $V \ni y \rightarrow W \ni z = g(y)$ となる g に対し、

$U \rightarrow W$ までの写像は $z = g(f(x))$ ということになるが、

これを $h = g \circ f$ と書くと、この h を f と g の 合成写像 と呼ぶ。

※ 合成写像の逆写像は (あるら) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ と順番がかわる。

線形写像: $U \rightarrow V$ の写像 f が元 x, y に対し、

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ と $f(ax) = a f(x)$ をみたすとき、これを 線形写像 と呼ぶ。

ベクトルの列ベクトルによる表示

ベクトル $\cdots$ 基底ベクトルの線形結合

$\rightarrow$ 逆にベクトル各成分の線形結合が元のベクトルになる (1)

空間 V の元 x に対して、 $x = \sum_{i=1}^n b_i x_i^B$ という線形結合で表されているとする。

b_i が基底、 x_i^B が成分なので、
列ベクトル x_B は $x_B = \begin{bmatrix} x_1^B \\ \vdots \\ x_n^B \end{bmatrix}$ となる。

逆に、ある数の行ベクトル $b_1 \sim b_n$ と x_B の積で考えたとき、

$$(b_1 \cdots b_n) x_B = (b_1 \cdots b_n) \begin{bmatrix} x_1^B \\ \vdots \\ x_n^B \end{bmatrix} = b_1 x_1^B + \cdots + b_n x_n^B = \sum_{i=1}^n b_i x_i^B$$

と、線形結合していることが明示であるため $b_1 \sim b_n$ は基底である。

よって x_B は V 上のベクトル x の基底 $B = \{b_i\}$ に対する $\mathbb{R}^n$ 上での表示。

ベクトル組の行列表示

n 本のベクトル $a_1, \dots, a_n$ を横に並べて行列にするのは何となく使ってたが、
あらためて基底 $B = \{b_i\}$ を考え、その線形結合 $a_j = \sum_{i=1}^n b_i a_{ij}^B$ と考えると、
つまりその議論から、

$$a_j = (b_1 \cdots b_n) \begin{bmatrix} a_{1j}^B \\ \vdots \\ a_{nj}^B \end{bmatrix} = (b_1 \cdots b_n) a_{jB}^B \text{ である。}$$

$$a_j \text{ と } a_1 \sim a_n \text{ で横に並べると、} (a_1 \cdots a_n) = (b_1 \cdots b_n) \begin{bmatrix} a_{11}^B & a_{12}^B & \cdots & a_{1n}^B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^B & a_{n2}^B & \cdots & a_{nn}^B \end{bmatrix} = (b_1 \cdots b_n) A_B$$

なので、基底 $\{b_i\}$ を使ってベクトルの組 $\{a_j\}$ を横並びに表にしたものが A_B と解釈できる。
 $\{a_j\}$ が線形独立であれば A_B は正則となる。

線形変換の行列表示

空間 V 上で $V \rightarrow V$ として元 x を $y = f(x)$ に写す線形変換 f を考える。

この x および y を基底 $B = \{b_i\}$ に対するベクトルとして表すと、

$$x = (b_1 \dots b_n) x_B \quad y = (b_1 \dots b_n) y_B$$

$$\Rightarrow (b_1 \dots b_n) y_B = f\{(b_1 \dots b_n) x_B\} = f\left(\sum b_i x_i^B\right) = f(b_1) \dots f(b_n) x_B$$

基底を変換したものの $f(b_i)$ の組で表れている。ということは、

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^n b_i a_{ij}^B \Rightarrow \{f(b_1) \dots f(b_n)\} = (b_1 \dots b_n) A_B$$

という行列の形式で基底 B 自体の変換を表わすようにする。

$$y_B = A_B x_B \quad \left(y_i^B = \sum_{j=1}^n a_{ij}^B x_j^B \right)$$

これは、(ベクトル空間の公理を満たす) ベクトル空間の元が線形変換されるとして、
どんなものでも行列/列ベクトルで表せていることを意味する。

(例) $y = Ax$ (A による線形変換)

ある基底 $B = \{b_i\}$ を仮定し、それでは表した $y_B = A_B x_B$ と解釈できる。

また $x = (b_1 \dots b_n) x_B$ / $y = (b_1 \dots b_n) y_B$ である。

$$\Rightarrow \begin{cases} f(b_j) = (b_1 \dots b_n) a_{.j} \\ (f(b_1) \dots f(b_n)) = (b_1 \dots b_n) A_B \end{cases} \quad \text{である。}$$

$\{b_i\}$ が与る先で $b_j' = f(b_j)$ とすると、 $b_j' = \sum b_i a_{ij}^B$ なので、
単なる座標変換と基底自体の変換は明確に区別される。

また $y = Ax \Rightarrow (f(b_1) \dots f(b_n)) x_B = (b_1' \dots b_n') x_B$ は、

b_j' はあくまでも元の座標系で表現される座標値を参考に与えた基底であること、
それを基に y という変換後の座標値が示されていることを意味している。

※ $b_j' = f(b_j)$ の組は線形独立とは限らないことに注意。

基底の変換と座標変換

空間 V 上の元 x が基底 $B = \{b_i\}$, $C = \{c_i\}$ でそれぞれ表されるとする、

$$\Rightarrow x = (b_1 \cdots b_n) x_B = (c_1 \cdots c_n) x_C$$

等号でつながっているということは C での表現と B での表現は互いに変換可能で、

$$\text{ここで } B \text{ を基底として } (c_1 \cdots c_n) = (b_1 \cdots b_n) P_{B \rightarrow C}$$

$$\text{または } c_j = \sum_{i=1}^n b_i p_{ij}$$

とかける。

このときの変換行列 $P_{B \rightarrow C}$ を 基底の変換行列 といい、 $x_B = P_{B \rightarrow C} x_C$ である。

(添字と実際に変換するものの向きが逆なことに注意。)

$P_{B \rightarrow C}$ は当然逆行列があるので、 $x_C = P_{B \rightarrow C}^{-1} x_B$ 。

この操作で 基底の変換に伴う座標変換 という。

再度であるが、座標変換は同じモノを別の座標 (別の基底) で見たにすぎないことに注意。

同じ基底で別のモノに変換される線形変換 とは、たとえ最終結果が同じであっても概念と理念は根本から異なる。

基底の変換と表示行列の変換

線形変換 $f: x \mapsto y = f(x)$ についての2通りの基底 $B = \{b_i\}$, $C = \{c_i\}$, それらの表示行列 F_B, F_C , B から C への変換行列を $P_{B \rightarrow C}$ とおくと、 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= (b_1 \cdots b_n) F_B x_B = (c_1 \cdots c_n) F_C x_C \\ &= (b_1 \cdots b_n) P_{B \rightarrow C} F_C x_C \\ &= (b_1 \cdots b_n) P_{B \rightarrow C} F_C P_{B \rightarrow C}^{-1} x_B \end{aligned}$$

と順に変換できる。

このとき最終形で出てきたカタマリ $P_{B \rightarrow C} F_C P_{B \rightarrow C}^{-1} = F_B$ を 表示行列の変換 という。

(逆に $P_{B \rightarrow C}^{-1} F_B P_{B \rightarrow C} = F_C$ でもある)。

* 今さらながら、行列の積は可換でないことに要注意。

計算順変えられないので $P_{B \rightarrow C}^{-1}$ と $P_{B \rightarrow C}$ で打ち消してイコールにはならない。
ただし 行列式の計算は少し違い、 $\det(F_B) = |P_{B \rightarrow C}| |F_C| (1/|P_{B \rightarrow C}|) = \det(F_C)$ が成り立つ。

線形変換 f によって、行列式は固有な値を示す重要な量である。

線形変換と座標変換

何處か言ってる通り線形変換と座標変換は似ているが別の操作

→ だが一般的に線形変換に等しい座標変換を考えてみる。

変換 f で基底 $B = \{b_i\}$ で線形変換するとき、基底の変換行列の逆行列が座標の変換行列になる。 (F_B に対して F_B^{-1})

$$\Rightarrow (b'_1, \dots, b'_n) = (b_1, \dots, b_n) F_B^{-1}$$

$$\Rightarrow x_{B'} = F_B x_B$$

これでもベクトル自体は変換してあらず、"パッキング"な変換とよばれる。

線形変換はベクトルを変換するアクティブな変換。

合成変換の行列による表示

変換 f, g に対する行列表示が F_B, G_B のとき、合成変換 $h = g \circ f$ の表示行列 H_B は

$$x_B = H_B x_B \iff H_B = G_B F_B$$

基本的に合成変換は表示行列の積、先に回転行列では証明していたがどんな変換でも成り立つ。