

26/ 9/28

行列Ⅲ: 固有値・対角化

PP.147~159

線形変換を表す行列 $\Rightarrow$ 変換の種類によっては固有の特徴を示す。
(成分の配置に固有の法則があらわれる)

↓
これを数的に確認、ないし表現する。

固有ベクトルと固有値



例えば、 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ において、
変換前後の点の動きを図示すると、
左図のように青い漸近線に沿った赤い曲線上で動く変換を受ける。

一般に、直線ももが線形変換 $C = AB$ を受けて別の直線 B に写される。

・直線の向きは変わる。

・直線は $\|C\|/\|B\|$ で表れる一定の比率で伸び縮みする。
 $\Rightarrow$ 向きを固有ベクトル、比率を固有値という。

いま、変換 A の固有値を λ 、固有ベクトルを u とおくと、

$\rightarrow$ 定義上、 $Au = \lambda u$

$\rightarrow (A - \lambda E)u = 0$

($u=0$ は常に成立 $\rightarrow$ 固有ベクトルからは除外)

このとき、 $A - \lambda E$ が正則な行列だと $u=0$ 以外の解は得られず、

$|A - \lambda E| = 0$ 、つまり正則でないことが必要条件となる。

この $|A - \lambda E| = 0$ を固有方程式という。

(例) $A = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ のとき、 $A - \lambda E = \begin{bmatrix} 3/2 - \lambda & 1 \\ 1/2 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (3/2 - \lambda)(1 - \lambda) - 1/2 = 0, \lambda = 2, 1/2$

このとき、(i) $\lambda = 2$ だと、

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} u_1 = 2s \\ u_2 = s \end{cases} \quad (s \text{ は任意の定数})$$

$$\therefore u = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(ii) $\lambda = 1/2$ だと、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} u_1 = -t \\ u_2 = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意の定数})$$

$$\therefore u = -t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$S \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ はそれぞれ相似変換の漸近線を表す。

(例) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ のとき、 $|A - \lambda E| = (1 - \lambda)^2 = 0$ 、 $\lambda = 1$

$$\rightarrow A - \lambda E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ とすると、}$$

$u_2 = 0$ とし $u = S \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を得る、これは変換で何の値も変えないことを示す。

(例) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ のとき、 $|A - \lambda E| = (2 - \lambda)^2 = 0$ 、 $\lambda = 2$

$$(A - \lambda E)u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ 任意の u_1, u_2 で成り立つ。

便宜上 $u = S \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と書かれることが多い。

(特殊な例) $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ (回転行列) のとき、

$$|A - \lambda E| = (\cos \theta - \lambda)^2 + \sin^2 \theta = 1 - 2\cos \theta \cdot \lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\text{解の公式より } \lambda = \frac{2\cos \theta \pm \sqrt{4\cos^2 \theta - 4}}{2} = \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1} = \cos \theta \pm \sqrt{-\sin^2 \theta}$$

$$= \cos \theta \pm i \sin \theta$$

$\Rightarrow \sin \theta = 0$ (なる $\theta (n\pi)$) 以外では複素数解をもってしまふ。

実際、このとき固有ベクトル u は $u = S \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と求まる。

※ n 次方程式に対しては (複素数の範囲で) n 個の解が存在する、という代数学の基本定理がある。

↓

固有方程式もそれに従うので、その解および結果である固有値 / 固有ベクトルも複素数の範囲で考えたほうがいい。

仮に n 次まで拡張したとして、やはり同じことが成り立ち、

$n \times n$ 行列は (複素数含めて) n 個の固有値をもつ、

また、その固有値一つに対し一つの固有ベクトルをもつ、

この n 本の固有ベクトルの線形結合 $x = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n$ に対し、
 A 自身で線形変換すると、

$$Ax = C_1 Au_1 + C_2 Au_2 + \dots + C_n Au_n = C_1 \lambda_1 u_1 + C_2 \lambda_2 u_2 + \dots + C_n \lambda_n u_n$$

と、固有ベクトルの固有値倍 λ_i により変化する。

・行列の対角化

・線形独立な固有ベクトル u_i の基底の変換

変換 A の固有値・固有ベクトルの組 $(\lambda_1, u_1), (\lambda_2, u_2), \dots, (\lambda_n, u_n)$

であれば、それぞれ基底が $[e_1, \dots, e_n] / [u_1, \dots, u_n]$ となり、

$[u_1, \dots, u_n] = [e_1, \dots, e_n] P_{E \rightarrow U}$ という基底変換行列が定まる。

二つの逆行列も存在することから、左右からそれぞれ A にかけて、

$$Au = P_{E \rightarrow U}^{-1} A P_{E \rightarrow U} = P_{E \rightarrow U}^{-1} [Au_1 \dots Au_n]$$

$$= P_{E \rightarrow U}^{-1} [\lambda_1 u_1 \dots \lambda_n u_n]$$

$$= P_{E \rightarrow U}^{-1} [u_1 \dots u_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = P_{E \rightarrow U}^{-1} P_{E \rightarrow U} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

∴ A は各固有値で対角成分にもつ対角行列に変換 → 行列の対角化

固有ベクトルを座標軸として線形変換をやる