No.

Date 20/10/15

P.32~

◦仮想仕事の原理

$R=0$ ⟶ 質点は平衡

└ここにδrだけ変位を与えると？

$\delta W = R\cdot\delta r = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z$

ただし$R=0$なので結局0 ⇒ 仮想仕事の原理

これは質点系にも拡張できる、$\delta W = \sum_{i=1}^{n} R_i\cdot\delta r_i \ (=0)$

・滑らかな束縛の場合



滑らかな曲面に質点mが束縛されているとき、
曲面に沿った仮想変位δrを考えると、
束縛力は向心方向なので常に$R\cdot\delta r=0$

束縛条件を$f(x,y,z)=0$で考える。

$$\begin{cases} f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)=0 \xrightarrow[\text{マクローリン展開}]{} \dfrac{\partial f}{\partial x}\delta x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\delta y+\dfrac{\partial f}{\partial z}\delta z=0 \\ \text{また、仮想仕事の原理で } F_x\delta x+F_y\delta y+F_z\delta z=0 \end{cases}$$

上記の連立方程式をなんとかして解けば座標が求められる。

(例) ラグランジュの未定乗数法 ⟶ 1本目に適当な定数をかけて2本目と足す、

$$\left(F_x+C\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x+\left(F_y+C\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y+\left(F_z+C\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z=0$$

δr各成分のカッコ内を見ると、完全に成分ごとにわかれている

⇒ $F_x+C\dfrac{\partial f_1}{\partial x}=0$、$F_y+C\dfrac{\partial f_2}{\partial y}=0$、$F_z+C\dfrac{\partial f_3}{\partial z}=0$ の3本の微分方程式をとき、

出てきたf_1、f_2、f_3を足し合わせたのが求める$f(x,y,z)$になる。

$$\xRightarrow[(\text{半円})]{} f(x,y,z)=A_1e^{-\frac{F_x}{C}x}+A_2e^{-\frac{F_y}{C}y}+A_3e^{-\frac{F_z}{C}z}\ (=0)$$

おしはかりの条件でなんとかする。

・質点系の場合

n個の質点系にr個の束縛条件が課せられているとも、

$$f_k(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, r)$$

とかける。$\boldsymbol{r}$が3次元なので自由度は$3n-r$

仮想変位で考えると、これは全ての質点で同様なので、

$$f_k(\boldsymbol{r}_1 + \delta\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 + \delta\boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n + \delta\boldsymbol{r}_n) = 0$$

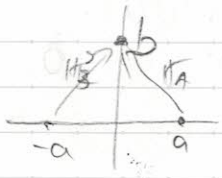
結局、先ほどまでの1質点の場合と3軸ベクトルでまとめてn個に増やしただけなので、各質点ごとに

$$\boldsymbol{F}_i + \sum_k C_k \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{r}_i} = 0$$

を全て解けば平衡点が求まる。　・(ごり押しすぎじゃない?)

[演習]

(1) 万有引力の法則



$$\boldsymbol{F}_A = G\frac{M_A m}{a^2+b^2}\left[-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

$$\boldsymbol{F}_B = G\frac{M_B m}{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F} = G\frac{m}{a^2+b^2}\left[-\frac{M_A - M_B}{\sqrt{a^2+b^2}}a, \frac{M_A + M_b}{\sqrt{a^2+b^2}}b\right]$$

(2) デカルト座標で $dV = dx\,dy\,dz$

極座標では $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$

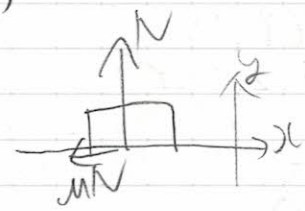
$$\frac{dx}{dr} = \sin\theta\cos\phi, \quad \frac{dy}{d\phi} = r\sin\theta\cos\phi, \quad \frac{dz}{d\theta} = -r\sin\theta$$

$$\rightarrow dV = -r^2(\sin\theta\cos\phi)^2\sin\theta = -r^2\sin\theta(\sin\theta\cos\phi)^2$$

(3)

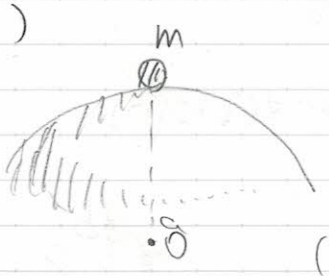
(4)

(4)



保存力ではない。
ある軸xに対してモノをx軸にはろうとして
摩擦力μNをうけるとも、Nはx軸に垂直な軸
yに依存する力である、N(y)。
⇒μNをxで積分しても距離がかかるだけで、
これは保存力にはならない。

(5)



(p33の議論は省略)。
$\Rightarrow f = A_1 e^{-\frac{k}{c}x} + A_2 e^{-\frac{k}{c}y} + A_3 e^{-\frac{k}{c}z}$
また、問題条件から $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = a$
$0 \leq x \leq a$、$0 \leq y \leq a$、$0 \leq z \leq a$
(i) $x = a$のとき → $y, z = 0$

運動の法則と運動方程式。 pp.37〜46

○運動の法則とニュートンの運動方程式

第1法則
力を受けない質点は
静止したままか
等速直線運動

第2法則
質量 m に力 $\vec{F}$ が
作用すると
加速度 $\vec{a}$ が生じる

第3法則
質点Aが質点Bに $\vec{F}$ の
力を与えると、BもA
に $-\vec{F}$ の力を与える。

慣性の法則 ／ 作用・反作用の法則

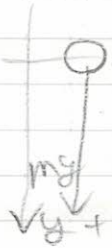
運動方程式
$$m\vec{a}=\vec{F}$$

これを起点に運動を考える力学を
ニュートン力学 とか 古典力学 とかいう。

ニュートン力学では初期条件として $\vec{r}_0$、$\vec{v}_0$ を与えると、
その後の質点の運動は一意に決まる。 ⇒ 因果律が成り立つ。
力は $[MLT^{-2}]$ で $1N$（1ニュートン）$=1kg$ の質点に $1m/s^2$ の加速度を
与える力が基準。

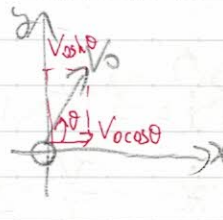
○一様な重力場での運動
（重力場：下向きに $\vec{F}=-mg\vec{e}_y$ の力がかかってるような場。）

・自由落下



$$ma=mg$$
$$a=g$$
$$v=\int a\,dt=gt+v_0$$
$$y=\int v\,dt=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0$$

・放物運動

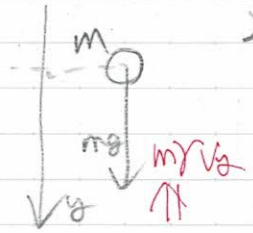


$$m\vec{a}=[0,-mg,0]$$
$$\vec{a}=[0,-g,0]$$
$$\vec{v}=[v_{0x},-gt+v_{0y},v_{0z}]$$
$$\vec{r}=\left[v_{0x}t+x_0,-\frac{1}{2}gt^2+v_{0y}t+y_0,v_{0z}t+z_0\right]$$

ところで、初速 $\vec{v}_0$ は $[v_0\cos\theta, v_0\sin\theta, 0]$
また $\vec{r}_0=[0,0,0]$ とする。
これらを代入して整理すると
$$\vec{r}=\left[v_0t\cos\theta,-\frac{1}{2}gt^2+v_0t\sin\theta,0\right]$$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

・空気抵抗があるときの運動



速度v_gで落下する物体は$m\gamma v_g$の空気抵抗で受けると仮定。

$$\Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-m\gamma\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\gamma\frac{dy}{dt}-g=0 \quad (\Rightarrow \lambda^2+\gamma\lambda+g=0)$$

$$\lambda=\frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4g}}{2}$$

$$\therefore y=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t} \quad (\lambda_1\to+側,\ \lambda_2\to-側)$$

$t=0$で$v=v_0$, $y=0$と仮定すると、

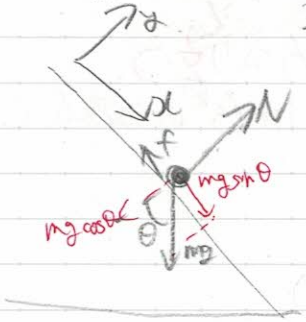
$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ y=C_1\lambda_1+C_2\lambda_2=v_0 \end{cases}$$

$C_1=-C_2$なので、 $v_0=(\lambda_1-\lambda_2)C_1=\sqrt{\gamma^2-4g}\,C_1$

$$\therefore C_1=\frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2-4g}} \Rightarrow y=\frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2-4g}}(e^{\lambda_1 t}+e^{\lambda_2 t})$$

・束縛運動

斜面上の運動



x, yそれぞれ成分に分解して立式、

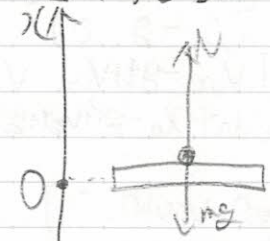
$$\begin{cases} m\ddot{x}=mg\sin\theta-f \\ m\ddot{y}=N-mg\cos\theta \end{cases}$$

斜面で転がっているので$y=0$が与えられ、

よって$N=mg\cos\theta$

あとは$\ddot{x}=g\sin\theta-f/m$に適当な初期条件で与えれば運動を特定できる。

・運動する台上の質点

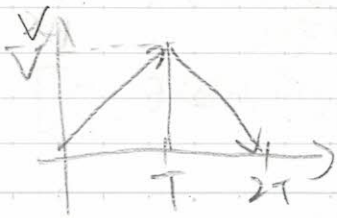


台が

$$\begin{cases} \dot{x}=\frac{V}{T}t \quad (0<t<T) \\ \dot{x}=-\frac{V}{T}t+2V \quad (T<t<2T) \end{cases}$$

で動くのが束縛条件。

運動方程式は$m\ddot{x}=N-mg \to \ddot{x}=N/m-g$だが、これが台上にいるのであれば$\ddot{x}$は束縛条件と一致しなければならない。



$$\Rightarrow \frac{V}{T}=\left(\frac{N}{m}-g\right)t+v_0$$

$$(v_0=0なので)\ N=m\left(g-\frac{V}{T}\right) \quad (0<t<T)$$