Date 26/10/5 No.

pp.160~pp.186

・対角化可能な条件

互いに相異なる固有値に属する固有ベクトルの組は線形独立となる

↓

固有方程式が重解をもたないなら、固有ベクトルは必ず線形独立.

※重解の場合も同じ固有値で全部独立なベクトルが得られるなら、

(いっつうは)全ての固有ベクトルは線形独立となる.

・相似変換

行列Aに対して$B=P^{-1}AP$で変換される変換行列Pと得られた行列Bがあるとき、この変換を相似変換という.

つまりBはAと互いに相似なのだが、このときBはAに対して以下の性質をもつ.

(i) 行列式が等しい. $|B|=|P^{-1}||A||P|=|P|^{-1}|A||P|=|A|$

(ii) 固有多項式が等しい. $|B-\lambda E|=|P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P|=|P^{-1}(A-\lambda E)P|$

└(iii) 同じ固有値をもつ. $=|A-\lambda E|$

∴行列式の値や固有値は、基底を問わずに固有である.

・行列の三角化

三角行列(i>jとなる成分a_{ij}が全て0の行列)について、

ある行列Aに対して、それに対する変換行列Pを用いて

三角行列$\Gamma=P^{-1}AP$に相似変換することができる.

三角行列はその構成上、固有値は対角成分をすべてかけたものになる.

$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$みたいなの

・固有値の諸性質

① n次行列Aの固有値を$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$としたとき、$\det(A)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

② 行列Aの対角成分の和をトレースというが、これについて、

$\mathrm{tr}(\alpha A+\beta B)=\alpha\,\mathrm{tr}(A)+\beta\,\mathrm{tr}(B)$　$\mathrm{tr}(^tA)=\mathrm{tr}(A)$

$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$　$\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(A)$　$\mathrm{tr}(A)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$

⇒トレースもまた基底によらず固有の値である.

No. Date

③固有多項式の解と係数の関係

n次行列Aについて、固有多項式は $(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)=0$ である
(※相似変換+三角行列化の合わせ技でこれに確定する.)

[2次のとき] $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ なら $(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)$

$\Rightarrow \lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\lambda+\lambda_1\lambda_2$

$\therefore \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=a+d=tr(A) \\ \lambda_1\lambda_2=ad-bc=\det(A) \end{cases}$

[3次のとき] $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ に対して、

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=\cdots\cdots$ と分解で続けることで、

$0=g(\lambda)=-\{\lambda^3-tr(A)\lambda^2+(\tilde{a_{11}}+\tilde{a_{22}}+\tilde{a_{33}})\lambda-\det(A)\}$ が得られる.

※$\tilde{a_{11}}$、$\tilde{a_{22}}$、$\tilde{a_{33}}$ はAの小行列式(逆行列の余因子で使ったもの)

[n次のとき] $g(\lambda)=(-1)^n\{\lambda^n-tr(A)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\det(A)\}$

④行列の多項式

あるAの三角化行列 Γ について、$\Gamma=P^{-1}AP$ であることから、

$\Gamma^2=P^{-1}APP^{-1}AP=P^{-1}A^2P \Rightarrow \Gamma^n=P^{-1}A^nP$ である.

つまり $A^n=P\begin{bmatrix} \lambda_1^n & (成分) & (成分) \\ 0 & \ddots & (成分) \\ 0 & 0 & \lambda_n^n \end{bmatrix}P^{-1}$ 対角成分は常にn乗の値となる

Date . . No.

・実対称行列の対角化

(おもらい：実対称行列 → $A={}^tA$ かつ a_{ij} が全て実数の行列)

・実対称行列の固有値・固有ベクトル

実対称行列の固有値はすべて実数となる ⇒固有ベクトルも実数になる.

(3次くらいまでは直感的にそうだとわかる. n次での証明は後ほど.)

相異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する.

固有値 λ_i に対する固有ベクトルを u_i とおくと,

$\lambda_i u_i \cdot u_j = Au_i \cdot u_j = {}^t(Au_i)\,u_j = {}^tu_i\,{}^tA u_j = {}^tu_i A u_j = {}^tu_i \cdot (\lambda_j u_j)$

$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j)\, u_i \cdot u_j = 0$. $\lambda_i \neq \lambda_j$ のとき(そうしかならない) $u_i \cdot u_j = 0$ でなくてはならなくなる.

・グラム・シュミットの正規直交化を,

m本の線形独立なベクトル $\{a_i\}$ からm本の互いに正規直交するベクトル $\{e_i\}$ を作りたい.

① とりあえず1本 a_1 で正規化して e_1 ということにする.

$$e_1 = \frac{a_1}{|a_1|}$$

② 2本目と同じ向きのベクトル e_2' を仮定する.

e_2' も e_2 同様, e_1 には直交するはずなので,

$e_2' = a_2 - (e_1 \cdot a_2)e_1 \xrightarrow{\text{これで正規化}} e_2 = \frac{e_2}{|e_2'|}$

③ 3本目も同様に, e_3' で仮定して,

$e_3' = a_3 - (e_1 \cdot a_3)e_1 - (e_2 \cdot a_3)e_2 \xrightarrow{\text{正規化}} e_3 = \frac{e_3}{|e_3'|}$

④ あとは同じ流れをm本までくり返す.

・実対称行列の対角化

実対称行列は直交行列で変換行列として対角化可能.

(※直交行列以外でもでもる確実にでもるルーチンがつある、というだけ.)

No. Date

・実二次形式：n個の実変数x_iによる二次の実係数多項式

$Q(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ ⇒x_i, x_jについて$Q(x)$は対称

a_{ij}はある実対称行列Aの成分とみなせる。

⇒ $Q(x)={}^t x A x$

さらに、Aを変換行列で対角行列$\Lambda=R^{-1}AR$に変換し、それに合わせて変数で$y=R^{-1}x$と変換すると、

$Q(y)={}^t y \Lambda y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$

つまりQは二次の項の和で書けるようになる。

・付録：複素ベクトル空間・行列について

実ベクトル空間で複素ベクトル空間に拡張すると、内積の公理が変わる。

・内積の違い

	実ベクトル空間	複素ベクトル空間
スカラー	$k\in\mathbb{R}$	$k\in\mathbb{C}$
対称性	$x\cdot y=y\cdot x$	$x\cdot y=\overline{y\cdot x}$ $x\cdot y=(y\cdot x)^*$
スカラー倍の線形性	$(k_1x)\cdot(k_2y)=k_1k_2\,x\cdot y$	$(k_1x)\cdot(k_2y)=k_1k_2\,x\cdot y$ $(k_1x)\cdot(k_2y)=k_1^*k_2\,x\cdot y$
数ベクトルの内積	${}^t x y$	${}^t \overline{x} y$

※共役転置：ある行列を転置してさらに複素共役をとったもの

Aに対してA^*

複素行列の和は基本共役転置として計算する。

・エルミート行列とユニタリー行列

エルミート行列：共役転置しても変わらない複素行列

ユニタリー行列：共役転置すると逆行列になる複素行列。

・以降、本編の雑多な証明。

◎互いに異なる固有値に属する固有ベクトルの組は線形独立である。

n次のAに対して固有値が$\lambda_1 \sim \lambda_n$までかぶらずあるとする。

それぞれの固有値に対する固有ベクトルをu_iとすると、

示す題意は$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i = 0$　（c_iは任意）

(i) $n=1$（1次）のとき

　$c_1 u_1 = 0$ならば$c_1 = 0$は自明。（いちおう、$c_1 = 0$である必要がある。）

(ii) $n=k$（k次；kは整数）で$\sum_{i=1}^{k} c_i u_i = 0$が成立しないと仮定する。

　ここではk番目について、$c_k \neq 0$であるとする。

　であれば、$\sum_{i=1}^{k-1} c_i u_i + c_k u_k = 0 \Rightarrow u_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{c_k} u_i$

(iii) $n=k+1$のとき、

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i u_i = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i + c_{k+1} u_{k+1} = \sum_{i=1}^{k-1} c_i u_i - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{c_k} u_i + c_{k+1} u_{k+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{c_k - 1}{c_k} c_i u_i \right) + c_{k+1} u_{k+1}$$

　このとき、どちらも$c_k \neq 0$および$\sum_{i=1}^{k} c_i u_i \neq 0$である必要があるが、

　頭めの$\left(1 - \frac{1}{c_k}\right) c_i$の部分について、$c_k$以外の$c_i$については

　$c_i = 0$が成立する。すると$c_{k+1} u_{k+1}$のみが残るが、

　$n=1$のときに示した通り、1項だけであると$c_{k+1} u_{k+1} = 0$について

　$c_{k+1} = 0$が自明になってしまい矛盾する。

　⟶ よって数学的帰納法より、あらゆるnで

　　$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i = 0$（線形独立）は成立しなければいけない。