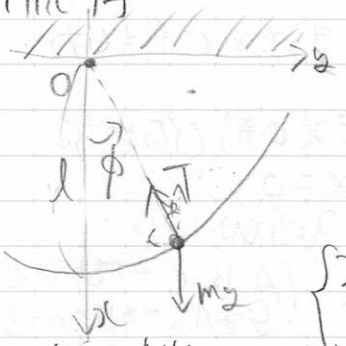
No.

Date 24/11/3

PR46〜57

・単振り子



$\begin{cases} m\ddot{x} = mg - T\cos\phi \\ m\ddot{y} = -T\sin\phi \end{cases}$ (ϕもtの関数)

単振り子 → 円運動、$\begin{cases} x = l\cos\phi \\ y = l\sin\phi \end{cases}$

$\begin{cases} \dot{x} = -l\sin\phi\cdot\dot{\phi} \\ \dot{y} = l\cos\phi\cdot\dot{\phi} \end{cases}$ $\begin{cases} \ddot{x} = -l\cos\phi\cdot\dot{\phi}^2 - l\sin\phi\cdot\ddot{\phi} \\ \ddot{y} = -l\sin\phi\cdot\dot{\phi}^2 + l\cos\phi\cdot\ddot{\phi} \end{cases}$

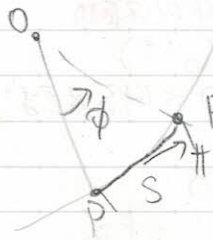
また、Tを消したいとすると $m\ddot{x} = mg + \left(\frac{\cos\phi}{\sin\phi} m\ddot{y}\right)$

$\rightarrow m(\ddot{x}\sin\phi - \ddot{y}\cos\phi) = mg\sin\phi$ となる。

→整理して $\ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\sin\phi$

(→$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{\phi^n}{n!}$ とおいて、)

・接線加速度と法線加速度



単振り子のような「ある曲線上を一定速度で動くとき」、
運動軌跡sを考える。
一定の角ϕに対する微小区間Δsについて、
その位置の接線を表す単位ベクトルnを使い、
($V = (\Delta s/\Delta t)n$ が成立する → 微分化して $V = \dot{s}n$
→ $a = \dot{V} = \ddot{s}n + \dot{s}\dot{n}$

ところで、nの空間微分については $\dot{n} = \frac{1}{\rho}m$ となる
(ρは軌跡の中心からの距離、mは法線ベクトル)

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dn}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{m}{\rho}V \longrightarrow \begin{cases} \vec{a} = a_t n + a_n m \\ (a_t = \dot{V} \ / \ a_n = \frac{V^2}{\rho}) \end{cases}$$

・接線/法線方向の運動方程式

ここまでの議論から、$\begin{cases} mV = F_t & (\text{接線}) \\ m\frac{V^2}{\rho} = F_n & (\text{法線}) \end{cases}$

と2本の運動方程式が立てられる。

単振り子の場合、$V = l\dot{\phi}$であることに注目すると、直交座標と同じく
最終的に $m\frac{V^2}{l} = T - mg\cos\phi$ が得られる。

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

No.

Date

◦単振動と強制振動

復元力：変位が起きたときに、もとの位置にもどろうとするために働く力
要するにバネみたいなもの



いったんこのかを $F=-m\omega^2 x$ の形と仮定する。
運動方程式より $\ddot{x}+\omega^2 x=0$
これは2階の運動方程式で、入るは ω

↳ $x=Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}=C\sin(\omega t+\theta)$ （A、B、C → それぞれ任意定数
θはA、Bを加法定理で変形）

※初期条件が2個あれば C と θ は具体的に決まる。
バネ定数 k のバネ振動の場合、$k=m\omega^2$ となるので、
$\omega=\sqrt{k/m}$、$T=2\pi\sqrt{m/k}$ が一意に決まる。

・強制振動

復元力がはたらく系にさらに力 $F(t)$ がかかる場合、
運動方程式は $m\ddot{x}=F(t)-m\omega^2 x$ ⇒強制振動
たとえば $F(t)=mF_0\cos\omega_0 t$ （外力も振動している）の場合、
$\ddot{x}+\omega^2 x-mF_0\cos\omega_0 t=0$
⇒ x を一般解と特殊解において、$x=C\sin(\omega t+\theta)+x_0(t)$ ←ばねのバネ振動
x_0 に関しては、ある程度 x の関係しない形から勘で見つける必要あり、
この場合 $x_0=B\cos\omega_0 t$ と考えると、
$-\omega_0^2 B\cos\omega_0 t+\omega^2 B\cos\omega_0 t-mF_0\cos\omega_0 t=0$
$\cos\omega_0 t\neq 0$ の仮定で $-(\omega_0^2-\omega^2)B-mF_0=0$、$\therefore B=\dfrac{mF_0}{\omega^2-\omega_0^2}$

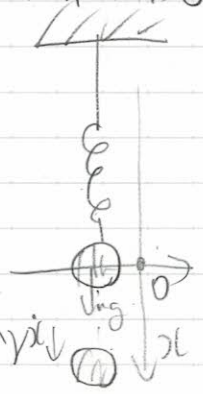
$$\rightarrow x=\underbrace{C\sin(\omega t+\theta)}_{\text{一般解}}+\underbrace{\frac{F_0}{\omega^2-\omega_0^2}\cos\omega_0 t}_{\text{特殊解}}$$

・共振

↑は $\omega=\omega_0$ で解が発散するので、物理的にはそこだけ別解がないといけない
$x_0(t)=Dt\cos\omega t$ とおくと、$\dot{x}_0=D\cos\omega t-Dt\omega\sin\omega t$
$\ddot{x}_0=-D\omega\sin\omega t-D\omega\sin\omega t-Dt\omega^2\cos\omega t$
$(-D\omega\sin\omega t-D\omega\sin\omega t-Dt\omega^2\cos\omega t)+\omega^2 Dt\cos\omega t-F_0\cos\omega t=0$
$-2D\omega\sin\omega t=F_0\cos\omega t$
$D=-\dfrac{F_0}{2\omega\tan\omega t}$
このとき x_0 は時間経過で振幅が増加しつづける → 共振

○減衰振動

バネ振動などでは実際には摩擦や空気抵抗などで抑制される（減衰振動）



いま、復元力 $-m\omega^2 x$ と抵抗力 $-2m\gamma\dot{x}$ だけがはたらくものとすると、運動方程式は $m\ddot{x} = -m\omega^2 x - 2m\gamma\dot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$、これは2階微分方程式

$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$、 $\lambda = \dfrac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega^2}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$

$\Rightarrow$ **γ と ω の大小関係で動きが変わる。**

(i) $\gamma \geq \omega$ のとき

$x = A_1 e^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2})t} + A_2 e^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2})t}$

eの肩の指数は実数なので、振動は起こさず、どこかに収束する前に止まる。（過減衰）

(※) $\gamma = \omega$ のとき、特性方程式が重解なので、一般解の形が変わって

$x = (A_1 + A_2 t) e^{-\gamma t}$ の形になる。

特に早く減衰するので、これを臨界制動という。

(ii) $\gamma < \omega$ のとき、強調するために $-\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ と書くことにする。

$x = A_1 e^{(-\gamma+i\sqrt{\omega^2-\gamma^2})t} + A_2 e^{(-\gamma-i\sqrt{\omega^2-\gamma^2})t}$

$= A_1 e^{-\gamma t} \cdot e^{i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t} + A_2 e^{-\gamma t} \cdot e^{-i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t}$

減衰部　振動部

なので、振動はするが、時間経過で振幅は減衰していく。

・外力が働くときの減衰振動

$m\ddot{x} = -m\omega^2 x - 2m\gamma\dot{x} + F(t)$。

要するに x について1個の一般解を出した後に特殊解 $x_0(t)$ を足すパターン。

計算量になるのでここでは割愛するが、与えられる外力によっては上記の場合分けの一部が消えうることには要注意。