No.

Date 26/11/9

PP.197〜218

○オイラー角と仲間たち

・回転後の基底の姿勢を3つの回転角で表す

回転する ← 標準基底
正規直交基底
自由度3の変化

⇒ある軸を基準に3つの回転角を使って表現する。

[座標系] $(xyz) \longrightarrow (x'y'z') \longrightarrow (x''y''z'') \longrightarrow (X'Y'Z')$
基準　1回目　2回目　最終

[回転軸] 3本必要、ここでは基準にする順番に、
1軸、2'軸、3''軸とする。
※3本ある軸の順序の選び方で、基本的には座標軸が基になってくる。

例えばデカルト座標(xyz)を基準とするとして、
1軸にxかyかzいずれを選ぶかで2'軸のとれる軸とその向きは変わってきてしまう。
1、2'、3''軸は慣習上どう選んでも互いに直交する。

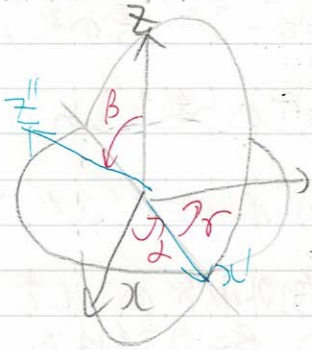
⇓

1軸と3''軸の外積は2'軸を示す。

とすると、1と3''軸が平行な場合を例外として、ある回転に対してその回転軸と回転角は一意に定まる。

そのうち、{ z-x'-z'' の形を オイラー角
z-y'-x'' の形を Tait-Bryan角 } という。

・オイラー角



先述の通り、1-2'-3''軸としてz-x'-z''軸を適用したもの

もとの座標系の基底を(e_x, e_y, e_z)
回転後の座標系の基底を(b_x, b_y, b_z)とおくと、

{ 1軸回転：$\cos\alpha = e_x \cdot e_{x'}$
2'軸回転：$\cos\beta = e_z \cdot b_z$
3''軸回転：$\cos\gamma = e_{x'} \cdot b_z$ }

(回転行列による表示)

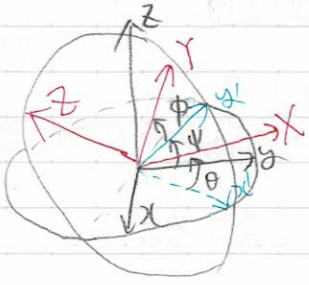
$$R^{Euler} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta \end{bmatrix}$$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836BT 6 mm ruled×36 lines

(例外) z軸とz'軸が平行なとき → 外積の定義上、x'軸が一意に定まらない
↳ この場合、2回回転で定まるのでそれを踏まえて
適宜定義が変わる

(バリエーション) ここまで z-x'-z'' となる軸のとり方をしたが、
同じような取り方があと5種類ある.
広義のオイラー角として、それらも使うことがある.

・Tait-Bryan角



1-2'-3'' 軸として z-y'-x'' 軸を適用したもの
y'軸は z軸と x''軸の両方と直交する.
(→ z×x''の外積で y'が求まる.)

$$\boldsymbol{e}_{y'} = \frac{\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{b}_x}{|\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{b}_x|}$$ を定義した上で、

$$\begin{cases} 1回回転: \cos\psi = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_{y'} \\ 2回回転: \cos\theta = (\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z) \cdot \boldsymbol{b}_x \\ 3回回転: \cos\phi = \boldsymbol{e}_{y'} \cdot \boldsymbol{b}_y \end{cases}$$

(回転行列による表示)

$$R^{TB} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & -\sin\psi\cos\phi+\cos\psi\sin\theta\sin\phi & \sin\psi\sin\phi+\cos\psi\sin\theta\cos\phi \\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi\cos\phi+\sin\psi\sin\theta\sin\phi & -\cos\psi\sin\phi+\sin\psi\sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}$$

(例外) Tait-Bryan角でも 1とる''軸(⇒zとx''軸)が平行だと2軸が一意に決まらない
→ 2回回転での再定義が必要、ただしこちらは $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ の縛りがある

(バリエーション) 広義のオイラー角回転、Tait-Bryan角も化の5種類含めて
6通りのとり方が存在、
→ これも含め、12種のオイラー角と呼ぶ流儀もあるとか.

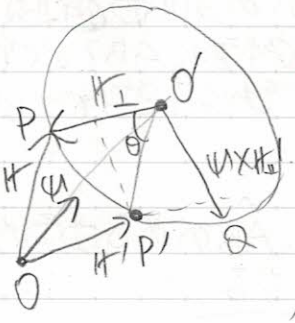
・ジンバルロック: オイラー角/Tait-Bryan角における例外状態のことを、
R^{Euler} や R^{TB} 上でムリヤリ表現したもの、$\beta = 0$ または、
本来はそもそも定義方法を変えているはずなので、
等計算に限っては発生しえない.
※トポロジーの問題で、水平線上に角度をわざわざ
定義する必要はないため、

○回転ベクトル

・定義とロドリゲスの回転公式

[定義] 3次元空間の任意の回転に対し、その回転により右ねじが進む方向をベクトルuの向きとし、回転角の大きさをそのまま大きさとして持つuを回転ベクトルという。
(⇒角度の大小それ自体にベクトルを考える。)

[回転公式]



Pから回転軸に下ろした垂線の足を点O'とすると、
$\overrightarrow{O'P}$、$\overrightarrow{OP}$は軸と直交し、それらが張る面も軸と直交する。

$\Rightarrow H_{//} = (u\cdot H)u$

$H_{\perp} = H - (u\cdot H)u$

Pから+方向にある点をQとすると、おも方上

$\overrightarrow{OQ}$は$u\times H_{\perp}$と直交する。

$\Rightarrow \overrightarrow{OQ} = u\times H_{\perp}$

$\therefore H' = H_{//} + \cos\theta H_{\perp} + \sin\theta\, u\times H_{\perp}$

$= \cos\theta H + (1-\cos\theta)(u\cdot H)u + \sin\theta\, u\times H$

これをロドリゲスの回転公式という。

[回転の合成] この形ではでない。

・回転行列による表示

$$R=\begin{bmatrix} \cos\theta+(1-\cos\theta)u_1^2 & (1-\cos\theta)u_1u_2-\sin\theta u_3 & (1-\cos\theta)u_1u_3+\sin\theta u_2 \\ (1-\cos\theta)u_2u_1+\sin\theta u_3 & \cos\theta+(1-\cos\theta)u_2^2 & (1-\cos\theta)u_2u_3-\sin\theta u_1 \\ (1-\cos\theta)u_3u_1-\sin\theta u_2 & (1-\cos\theta)u_3u_2+\sin\theta u_1 & \cos\theta+(1-\cos\theta)u_3^2 \end{bmatrix}$$

※ただし、u_1, u_2, u_3はuの各成分。

この表示であれば回転の合成が可能。

・回転行列の固有値/固有ベクトル

Rに対して$|R-\lambda E|$を求めると、途中省略して

$$g(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\cos\theta\,\lambda + 1) \quad (=0)$$

この形なので$\lambda=1$は確定、残るのかたまりも2次の回転行列の固有方程式なので、

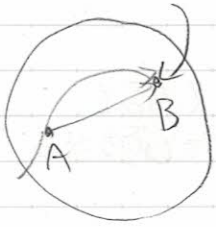
$$\lambda = \begin{cases} +1 \\ e^{\pm i\theta} \end{cases}$$

また、Ruについても、計算すると固有値1の固有ベクトルになる。

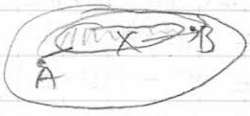
・3次元回転の大域的な構造



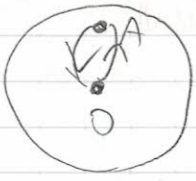
前提として、$0 \leq \theta \leq \pi$とする（でないとπごとに無限の解が発生する）
原点とはもんだ向かい(0ベクトル)についても、ここでは全て同一視することで1:1対応の状態をつくる。
ただしθをπ以上取っているだけで、他は端からくめてこの球面はあくまで連続である。



面上の点AからBに向かう道$\overset{\frown}{AB}$をそえる。
この道のとり方が無制限の場合、$\overset{\frown}{AB}$のある曲面で単連結という。
たとえばトーラス面の対面に$\overset{\frown}{AB}$をおくと、
直線に戻ってもれないのでそれは単連結ではない。



ところでこの球面は回転ベクトルの話だったので、$\overset{\frown}{AB}$のある曲面が単連結だと、その道上の各点は回転姿勢をあらすことになる。
⇒3D的には無回転からの回転モーションに相当。





一方、$\overset{\frown}{AB}$が単連結でないなら1回転では元姿勢に戻れないが、2回転以上して、その過程で穴になる部分を避けられればもとの姿勢に戻せる可能性がある。

⇓

でてる限り回転の表現はその空間と同じトポロジーにした方が都合がいい。
しかし回転行列/オイラー角/Tait-Bryon角どれも厳密にそれで満たせない

⇓

クォータニオン